

Voting

David Easley and Jon Kleinberg

Mayra Catalina Barrios, Jhoan Sebastián Fuentes y Nicolás Suárez.

7 de octubre de 2026

Contenido

Votación para la toma de decisiones colectiva

Preferencias individuales

Sistemas de votación: regla de la mayoría

Sistemas de votación: votación posicional

Teorema de imposibilidad de Arrow

Preferencias de un solo pico y el teorema del votante mediano

La votación como forma de agregación de información

Votación insincera para la agregación de información

Decisiones de jurados y la regla de unanimidad

Votación secuencial y su relación con las cascadas de información

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

Ejercicios

Basado en el capítulo 23 de Easley y Kleinberg (2010).

Votación para la toma de decisiones colectiva

- Al igual que los mercados, los sistemas de votación agregan la información de un grupo. Lo que cambia es el contexto en el que se usan.
- La votación se usa cuando un grupo busca expresamente **una única decisión** que hable por él: elegir candidatos, aprobar un proyecto de ley, dar un veredicto, otorgar un premio u ordenar las mejores películas del siglo.
- En los mercados, las decisiones se expresan en números y se agregan con promedios ponderados. En la votación, en cambio, no hay una forma natural de promediar preferencias: se elige entre personas, políticas u opciones según criterios subjetivos.
- La votación sirve para escoger un único ganador o para producir una lista ordenada (un ranking) de las alternativas.

Votación para la toma de decisiones colectiva

- Los votantes pueden estar en desacuerdo por dos razones:
 - ▶ **Divergencia genuina** en sus evaluaciones subjetivas: críticos de cine que discuten si la mejor película es *Citizen Kane* o *The Godfather*.
 - ▶ **Falta de información**: los miembros de un jurado comparten el objetivo (el veredicto correcto), pero difieren en la información que tienen y en cómo la procesan.
- Aplicaciones en línea (Dwork et al., [2001](#)): la metabúsqueda combina los rankings de varios buscadores, y los sistemas de recomendación agregan las preferencias de usuarios con gustos similares.
- Naturalmente, surgen las siguientes preguntas:
 - ▶ ¿Cómo producir un único ranking a partir de opiniones en conflicto?
 - ▶ ¿Es la regla de la mayoría un buen mecanismo? ¿Existe uno mejor?
 - ▶ ¿Qué significa que un sistema de votación sea bueno?

Preferencias individuales

Completitud y transitividad

- Un grupo evalúa un conjunto finito de alternativas y quiere producir un **ranking grupal** que las ordene de la mejor a la peor.
- Si el individuo i prefiere la alternativa X a la alternativa Y , se escribe $X \succ_i Y$. $\succ_i$ es la **relación de preferencia** de i .

Completitud

Para cada par de alternativas distintas X y Y , el individuo prefiere X a Y o prefiere Y a X , pero no ambas. No se consideran empates ni pares sin preferencia.

Transitividad

Si $X \succ_i Y$ y $Y \succ_i Z$, entonces $X \succ_i Z$.

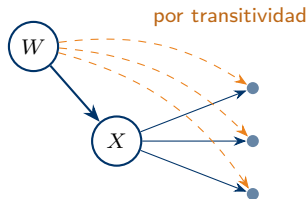
Preferencias individuales

Rankings individuales

- Otro modelo: una lista ordenada de todas las alternativas, de la mejor a la peor. De ella surge una relación de preferencia ($X \succ_i Y$ si X está antes que Y), que es completa y transitiva. El recíproco también es cierto:

Si una relación de preferencia es completa y transitiva, entonces surge de alguna lista ordenada de las alternativas.

- Sea X la alternativa que es preferida a más alternativas. Entonces es preferida a *todas*: si alguna W fuera preferida a X , por transitividad W sería preferida a todo lo que X supera y además a X , es decir, a más que X .
- X va al frente de la lista. Se retira y se repite el proceso con las alternativas restantes.



Sistemas de votación: regla de la mayoría

La regla de la mayoría y la paradoja de Condorcet

Sistema de votación (procedimiento de agregación)

Cualquier método que toma una colección de relaciones de preferencia individuales, completas y transitivas (equivalentemente, una colección de rankings individuales), y produce un ranking grupal.

- Con dos alternativas, el sistema más usado y más natural es la **regla de la mayoría**: la alternativa preferida por la mayoría de los votantes queda primera. Se supone un número impar de votantes, para que no haya empates.
- Con más de dos alternativas, el enfoque más directo es aplicar la regla de la mayoría a cada par y construir una preferencia grupal: $X \succ Y$ si $X \succ_i Y$ para la mayoría de los individuos i .
- La preferencia grupal $\succ$ es completa. La dificultad es que puede no ser transitiva, aunque todas las preferencias individuales lo sean.

Sistemas de votación: regla de la mayoría

La regla de la mayoría y la paradoja de Condorcet

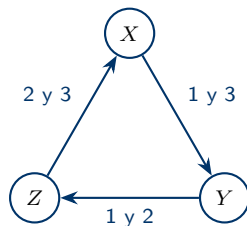
Tres individuos y tres alternativas:

$$X \succ_1 Y \succ_1 Z$$

$$Y \succ_2 Z \succ_2 X$$

$$Z \succ_3 X \succ_3 Y$$

Con la regla de la mayoría por pares: $X \succ Y$ (lo prefieren 1 y 3), $Y \succ Z$ (1 y 2) y $Z \succ X$ (2 y 3). La transitividad exigiría $X \succ Z$.



Una flecha de X a Y indica $X \succ Y$.

Paradoja de Condorcet

Preferencias individuales transitivas pueden dar lugar a preferencias grupales no transitivas.

Sistemas de votación: regla de la mayoría

La regla de la mayoría y la paradoja de Condorcet

- La paradoja también muestra cómo una sola persona puede formar preferencias no transitivas (Bar-Hillel & Margalit, 1988; Fishburn, 1991).
- Una estudiante compara universidades de a pares y prefiere la que es mejor en la mayoría de tres criterios: ranking alto, clases pequeñas y beca grande.

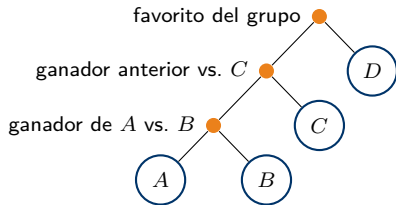
Universidad	Ranking nacional	Tamaño promedio de clase	Beca ofrecida
X	4	40	\$3000
Y	8	18	\$1000
Z	12	24	\$8000

- $X \succ_i Y$ (ranking y beca), $Y \succ_i Z$ (ranking y tamaño de clase) y $Z \succ_i X$ (tamaño de clase y beca).
- Cada criterio actúa como un votante: la «preferencia individual» de la estudiante es en realidad una preferencia grupal sintetizada a partir de los tres criterios.

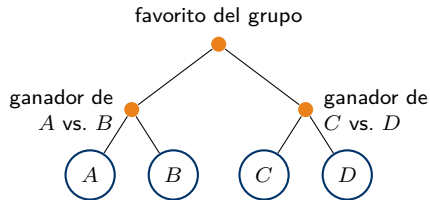
Sistemas de votación: regla de la mayoría

Sistemas de votación basados en la regla de la mayoría

- Aun con la paradoja, hay que producir un ranking grupal. Se busca un **favorito del grupo**; para el ranking completo, se retira y se repite el procedimiento.
- Las alternativas se ordenan en una **agenda** y se eliminan una a una por mayoría: se comparan las dos primeras, el ganador se compara con la tercera, y así sucesivamente.
- En general se puede usar cualquier **torneo de eliminación**: el ganador de cada comparación avanza y el perdedor queda eliminado.



(a) Una alternativa nueva a la vez.

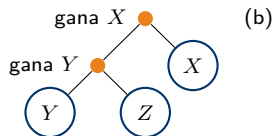
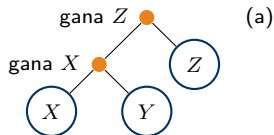


(b) Las alternativas se emparejan en otro orden.

Sistemas de votación: regla de la mayoría

Patologías en los sistemas de votación basados en la regla de la mayoría

- Estos sistemas son susceptibles a la **fijación estratégica de la agenda**.
- Con los rankings de la paradoja de Condorcet, el ganador depende por completo del orden de las votaciones:
 - ▶ Si primero se enfrentan X y Y , gana X , que luego pierde con Z .
 - ▶ Si primero se enfrentan Y y Z , gana Y , que luego pierde con X .
- El favorito del grupo lo determina, entonces, quien controla la agenda.
- Permitir que se reintroduzcan alternativas eliminadas no lo remedia: siempre hay una que derrota a la actual, y el proceso nunca terminaría.
- Lo mismo le ocurre a la estudiante si descarta universidades a medida que llegan las admisiones (X , Y , Z): termina en Z , aunque prefería Y a Z .



- Otros sistemas generan el ranking grupal directamente desde los rankings individuales: asignan a cada alternativa un peso según sus posiciones y las ordenan por su peso total.

Conteo de Borda (Jean-Charles de Borda, 1770)

Con k alternativas, el ranking del individuo i da un peso de $k - 1$ a su primera alternativa, de $k - 2$ a la segunda, y así hasta 1 a la penúltima y 0 a la última. El peso total de una alternativa es la suma de los pesos que recibe de todos los individuos.

Ejemplo con dos votantes:

$$A \succ_1 B \succ_1 C \succ_1 D$$

$$B \succ_2 C \succ_2 A \succ_2 D$$

$$\text{Pesos: } A = 3 + 1 = 4, B = 2 + 3 = 5, \\ C = 1 + 2 = 3 \text{ y } D = 0 + 0 = 0.$$

$$\text{Ranking grupal: } B \succ A \succ C \succ D.$$

- El conteo de Borda se usa para elegir ganadores de premios deportivos, como el trofeo Heisman; una variante elige al Jugador Más Valioso del béisbol profesional, y Associated Press y United Press International lo usan para clasificar equipos.
- **Sistema de votación posicional:** cualquier sistema que asigna puntos a cada posición de cada lista y ordena las alternativas por el total de puntos. Por ejemplo: 3 puntos a la primera posición, 2 a la segunda, 1 a la tercera y 0 a las demás.
- Siempre genera un ranking completo y transitivo (con una regla de desempate preacordada), al ordenar las alternativas con un único criterio numérico.

Sistemas de votación: votación posicional

Patologías en los sistemas de votación posicional

- Cinco críticos escogen por mayoría la mejor película de todos los tiempos: *Citizen Kane* vence a *The Godfather* 3 a 2.
- A último momento se añade *Pulp Fiction* como tercera opción y se decide usar el conteo de Borda:

Críticos	Ranking reportado
1, 2 y 3	<i>Citizen Kane</i> $\succ_i$ <i>The Godfather</i> $\succ_i$ <i>Pulp Fiction</i>
4 y 5	<i>The Godfather</i> $\succ_i$ <i>Pulp Fiction</i> $\succ_i$ <i>Citizen Kane</i>

- Pesos: *Citizen Kane* $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$; *The Godfather* $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$; *Pulp Fiction* $3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$. El favorito del grupo es *The Godfather*.
- *Citizen Kane* no queda primera aunque derrota a cada una de las otras dos en una comparación directa por mayoría.
- El resultado depende de una alternativa «irrelevante».

Sistemas de votación: votación posicional

Patologías en los sistemas de votación posicional

- Otra dificultad es el **reporte estratégico** de preferencias falsas.
- Suponga que el ranking verdadero de los críticos 4 y 5 es

The Godfather $\succ_i$ *Citizen Kane* $\succ_i$ *Pulp Fiction*.

Con los cinco rankings verdaderos, *Citizen Kane* queda primera: recibe $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$, contra $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$ de *The Godfather*.

- Si los críticos 4 y 5 deciden reportar

The Godfather $\succ_i$ *Pulp Fiction* $\succ_i$ *Citizen Kane*,

se obtienen los rankings del escenario anterior y *The Godfather* queda primera.

- En el conteo de Borda, a veces los votantes se benefician de mentir sobre sus preferencias, en particular para bajar en el ranking grupal a una alternativa que muchos otros votantes pondrán de primera.

Sistemas de votación: votación posicional

Ejemplos de las elecciones presidenciales de EE. UU.

- En la elección general, los estados suelen seleccionar a sus electores mediante **votación por pluralidad**: gana quien recibe más primeros lugares.
- La pluralidad es un sistema posicional: cada ranking asigna 1 al candidato primero y 0 a los demás.
- Con dos candidatos equivale a la mayoría; con más de dos surgen efectos de «tercer partido», donde una opción minoritaria puede alterar el resultado entre los dos principales.
- Esto incentiva el voto estratégico: algunos reportan como primera opción a quien tiene más probabilidades de ganar.
- Estos efectos se han observado y estudiado en elecciones recientes y pasadas, como la de Abraham Lincoln en 1860 (Tabarrok & Spector, [1999](#)).

Teorema de imposibilidad de Arrow

- ¿Podemos agregar preferencias sobre 3+ alternativas sin generar problemas?
- Un sistema de votación transforma rankings individuales en un ranking grupal.

Unanimidad (Principio de Pareto)

Si todos prefieren X a Y , el grupo también.

Independencia de Alternativas Irrelevantes (IIA)

La comparación grupal entre X y Y depende solo de cómo los individuos comparan X y Y .

Teorema de imposibilidad de Arrow

Sistemas de votación que satisfacen Unanimidad e IIA

- IIA impide que una tercera alternativa altere la comparación entre X y Y .
- Borda y la fijación de agenda pueden violar IIA.
- Con dos alternativas, la mayoría satisface Unanimidad e IIA.
- Con tres o más alternativas, la **dictadura** también las satisface.
- Hay una dictadura posible por cada votante.

Teorema de imposibilidad de Arrow

El teorema de Arrow

- Resultado de Kenneth Arrow (Arrow, 1950, 1963).

Teorema de Arrow

Con al menos tres alternativas, todo sistema de votación que satisface **Unanimidad** e **IIA** es una dictadura.

- Equivalentemente: **Unanimidad** + **IIA** + **No dictadura** son incompatibles.
- Toda regla debe sacrificar alguna propiedad deseable.

Preferencias de un solo pico y el teorema del votante mediano

- Arrow es un resultado general. ¿Qué ocurre si restringimos las preferencias?
- Considere los rankings de la paradoja de Condorcet:

$$X \succ_1 Y \succ_1 Z, \quad Y \succ_2 Z \succ_2 X, \quad Z \succ_3 X \succ_3 Y.$$

- Suponga que $X < Y < Z$: gasto bajo, medio y alto.
- Los votantes 1 y 2 tienen una cantidad favorita y prefieren opciones cercanas.
- El votante 3, en cambio, prefiere los extremos a la opción intermedia.

Preferencias de un solo pico y el teorema del votante mediano

Preferencias de un solo pico

- Las alternativas están ordenadas sobre una línea.
- Cada votante tiene un único **pico**: su alternativa favorita.

Preferencias de un solo pico

Al alejarnos del pico hacia cualquier lado, las alternativas son cada vez menos preferidas.

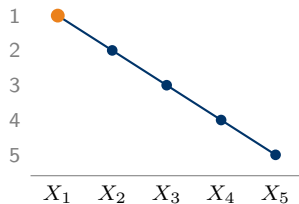
$$X_t \succ_i X_{t+1} \succ_i X_{t+2} \succ_i \cdots \quad \text{y} \quad X_t \succ_i X_{t-1} \succ_i X_{t-2} \succ_i \cdots$$

- No puede preferirse simultáneamente dos opciones situadas a lados opuestos de una opción intermedia.

Preferencias de un solo pico y el teorema del votante mediano

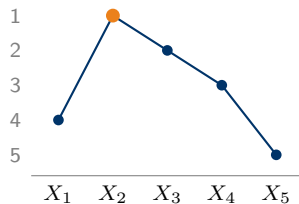
Preferencias de un solo pico

- Tres votantes, cinco alternativas y tres picos distintos.



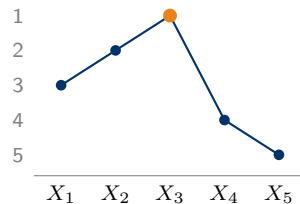
(a) Votante 1

$X_1 \succ_1 X_2 \succ_1 X_3 \succ_1 X_4 \succ_1 X_5$



(b) Votante 2

$X_2 \succ_2 X_3 \succ_2 X_4 \succ_2 X_1 \succ_2 X_5$



(c) Votante 3

$X_3 \succ_3 X_2 \succ_3 X_1 \succ_3 X_4 \succ_3 X_5$

- **Un solo pico:** al alejarnos de la alternativa favorita, el ranking cae.

Preferencias de un solo pico y el teorema del votante mediano

Regla de la mayoría con preferencias de un solo pico

- En general, las comparaciones por mayoría pueden generar ciclos.
- Con preferencias de un solo pico, esos ciclos desaparecen (Black, 1948).

Afirmación

Si todos los votantes tienen preferencias de un solo pico, la mayoría por pares produce un ranking **completo y transitivo**.

- Ordenemos los **picos individuales** de izquierda a derecha.
- El pico que queda en la mitad es el **favorito individual mediano**.

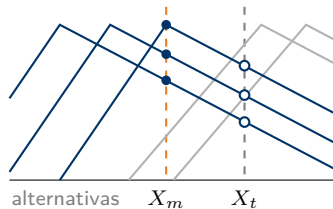
Preferencias de un solo pico y el teorema del votante mediano

El favorito individual mediano

Teorema del votante mediano

Con preferencias de un solo pico, el favorito individual mediano derrota por mayoría a cualquier otra alternativa.

- Tome una alternativa X_t a la derecha del favorito mediano X_m .
- Una mayoría tiene su pico en X_m o a su izquierda.
- Todos ellos prefieren X_m a X_t .



En azul, los votantes con pico en X_m
o a su izquierda.

Preferencias de un solo pico y el teorema del votante mediano

Construcción del ranking grupal

1. El favorito mediano ocupa el primer lugar.
2. Se elimina esa alternativa.
3. Se recalculan los picos y se repite.

■ En el ejemplo:

$$X_2 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_5.$$

- El ranking grupal **no tiene que coincidir** con todo el ranking del votante mediano.

La votación como forma de agregación de información

- Ahora los votantes comparten un mismo objetivo: **identificar la mejor alternativa**.
- Las diferencias provienen de información privada.
- Ejemplos: jurados y juntas de asesores.
- Empezamos con votos **simultáneos y sinceros**.

La votación como forma de agregación de información

Votación simultánea y sincera: el teorema del jurado de Condorcet

- Dos alternativas: X y Y . Una de ellas es realmente mejor.
- Prior:

$$\Pr(X \text{ es mejor}) = \Pr(Y \text{ es mejor}) = \frac{1}{2}.$$

- Cada votante recibe una señal privada e independiente.
- La señal es correcta con probabilidad $q > \frac{1}{2}$.

$$\Pr(X \text{ es mejor} \mid \text{señal } X) = \frac{\frac{1}{2}q}{\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}(1-q)} = q.$$

- Por tanto, votar sinceramente equivale a **seguir la señal**.

La votación como forma de agregación de información

Votación simultánea y sincera: el teorema del jurado de Condorcet

Teorema del jurado de Condorcet

Si cada votante acierta con probabilidad $q > 1/2$, entonces

$$\Pr(\text{la mayoría acierta}) \longrightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

- **Sabiduría de las multitudes:** muchos votantes imperfectos pueden producir una decisión casi perfecta.

$$q = 0,6 : \quad 1 : 60 \% \quad 11 : 75 \% \quad 51 : 93 \% \quad 101 : 98 \%.$$

Votación insincera para la agregación de información

Un experimento que incentiva la votación insincera

- A veces, maximizar la probabilidad de que el grupo acierte requiere votar **insinceramente** (Austen-Smith & Banks, 1996; Feddersen & Pesendorfer, 1996, 1998).
- Dos urnas, cada una con probabilidad $1/2$.

Urna pura: ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 10 canicas blancas

Urna mixta: ● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ○ 9 canicas verdes y 1 blanca

- Tres personas observan una canica privada y la devuelven.
- Votan simultáneamente por el tipo de urna.
- Si la mayoría acierta, **todos ganan**.

Votación insincera para la agregación de información

Probabilidades condicionales y decisiones de voto

- Blanca:

$$\Pr(\text{pura} \mid \text{blanca}) = \frac{10}{11}.$$

- Verde $\Rightarrow$ urna mixta con certeza.

- Voto sincero:

blanca $\rightarrow$ pura, verde $\rightarrow$ mixta.

- Mi voto solo importa si los otros dos están **divididos**.
- Ese empate implica que alguien vio una mara verde.

Si mi voto es decisivo, la urna es **mixta**. Por tanto, conviene votar siempre «mixta».

Votación insincera para la agregación de información

Interpretaciones del experimento de votación

- La votación puede analizarse como un **juego bayesiano**.
- Votar sinceramente no siempre es un equilibrio.
- La clave es razonar **condicional en ser decisivo**.
- La información relevante cambia cuando sabemos que nuestro voto afecta el resultado.
- Es la misma lógica detrás de la **maldición del ganador** (Feddersen & Pesendorfer, [1996](#)).

Decisiones de jurados y la regla de unanimidad

Veredictos, unanimidad y señales privadas

- La votación insincera también puede surgir en un jurado, entre quienes quieren contribuir a la mejor decisión del grupo (Feddersen & Pesendorfer, 1998).
- Dos diferencias con el teorema del jurado de Condorcet, pensadas para no condenar a inocentes:
 - ▶ Se requiere un voto **unánime** para condenar.
 - ▶ El criterio es «culpable más allá de toda duda razonable»: se condena si $\Pr[\text{culpable} \mid \text{toda la información}] > z$, para algún z mayor que $1/2$.
- Cada miembro del jurado recibe una señal privada e independiente, de culpabilidad (señal G) o de inocencia (señal I). Para algún $q > 1/2$,

$$\Pr[\text{señal } G \mid \text{culpable}] = q \quad \text{y} \quad \Pr[\text{señal } I \mid \text{inocente}] = q.$$

- Con una probabilidad a priori de culpabilidad de $1/2$, la regla de Bayes da $\Pr[\text{culpable} \mid \text{señal } G] = q$ y $\Pr[\text{inocente} \mid \text{señal } I] = q$.
- Las señales representan interpretaciones privadas de la evidencia que todos ven.

Decisiones de jurados y la regla de unanimidad

Modelar la decisión de un miembro del jurado

- Suponga que usted es uno de los k miembros del jurado y recibe una señal I . Su señal por sí sola indica inocencia con probabilidad $q > 1/2$.
- Pero las señales de los demás podrían llevar la probabilidad de culpabilidad por encima de z . Además, *¿en qué situaciones mi voto afecta el resultado?* Con la regla de unanimidad, solo cuando todos los demás votan por condenar.
- Si los demás votan según su señal, en ese caso hay $k - 1$ señales G y una sola señal I , la suya. Por la regla de Bayes:

$$\begin{aligned}\Pr[\text{culpable} \mid \text{usted tiene la única señal } I] &= \frac{\frac{1}{2} q^{k-1} (1 - q)}{\frac{1}{2} q^{k-1} (1 - q) + \frac{1}{2} (1 - q)^{k-1} q} \\ &= \frac{q^{k-2}}{q^{k-2} + (1 - q)^{k-2}}.\end{aligned}$$

Decisiones de jurados y la regla de unanimidad

Modelar la decisión de un miembro del jurado

- Como $q > 1/2$, el término $(1 - q)^{k-2}$ es una parte arbitrariamente pequeña del denominador cuando k crece, y la probabilidad converge a 1. Con un jurado grande,

$$\Pr[\text{culpable} \mid \text{usted tiene la única señal } I] > z.$$

- Por ejemplo, con $q = 0,6$ la probabilidad es 0,60 si $k = 3$, 0,84 si $k = 6$ y 0,98 si $k = 12$ (cálculo propio con la fórmula anterior).

Si usted cree que todos los demás votan según su señal y el jurado es suficientemente grande, debe ignorar su señal y votar siempre por condenar.

- Su voto solo afecta el resultado cuando todos los demás tienen la opinión contraria; si están tan bien informados como usted, probablemente tienen razón.
- La regla de unanimidad se diseñó para evitar condenas erróneas, pero crea un incentivo a ignorar las señales de inocencia.

Decisiones de jurados y la regla de unanimidad

Equilibrios de la votación bajo unanimidad y otros sistemas

- Con jurados suficientemente grandes, votar según la señal no es un equilibrio. Feddersen y Pesendorfer (1998) muestran cómo son los equilibrios:
 - ▶ Uno patológico: todos ignoran su señal y votan por absolver. Nadie puede cambiar el resultado, así que nadie tiene incentivos a desviarse.
 - ▶ Un único equilibrio en el que todos usan la misma estrategia y el comportamiento depende de la señal. Es en estrategias mixtas: con señal G se vota por condenar; con señal I se vota por condenar con una probabilidad entre 0 y 1.
- En ese equilibrio, la probabilidad de condenar a un inocente es positiva y **no converge a cero** cuando el tamaño del jurado tiende a infinito.
- Regla de f -mayoría ($0 < f < 1$): se condena si una fracción f vota por condenar. Un voto afecta el resultado cuando los demás están divididos en proporción f a $(1 - f)$, un caso menos extremo, y la probabilidad de que el grupo se equivoque converge a 0.
- Exigir una mayoría amplia, en lugar de unanimidad, podría inducir una menor probabilidad de condenas erróneas.

Votación secuencial y su relación con las cascadas de información

- Se vuelve al teorema del jurado de Condorcet y ahora se elimina el supuesto de simultaneidad, conservando el de sinceridad.
- Con votantes sinceros que actúan en secuencia, el modelo coincide con el de las cascadas de información (capítulo 16): cada votante observa las elecciones de los anteriores, pero no sus señales, y puede ignorar su propia señal.
- Por el análisis de la sección 16.5, dos votos iniciales por X causan una cascada en la que todos los votos posteriores son por X , sea o no la decisión correcta.
- En general, la cascada se forma cuando los votos por una alternativa superan por primera vez a los de la otra en al menos dos.
- Las cascadas pueden ser incorrectas, y más votantes no las detienen.

El principio del teorema del jurado de Condorcet no se aplica: no hay razón para esperar que una multitud grande de votantes secuenciales acierte.

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

- Se sigue la demostración corta de Geanakoplos (2005), no la original de Arrow.
- Hay un conjunto finito de alternativas y k individuos, numerados $1, 2, \dots, k$. Un **perfil** es la colección de los k rankings individuales.
- Un sistema de votación es una función F que toma un perfil P y produce un ranking grupal $F(P)$. No hay empates en los rankings individuales ni en el grupal.
- **Unanimidad**: $X \succ Y$ en el ranking grupal siempre que $X \succ_i Y$ para todo individuo i .
- **IIA**: el orden de X y Y en el ranking grupal depende solo del orden de X y Y en cada ranking individual, y no de su posición relativa a otras alternativas.

Teorema de Arrow

Con al menos tres alternativas, los k procedimientos de dictadura son los únicos sistemas de votación que satisfacen Unanimidad e IIA.

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

- El ranking de un individuo **restringido a X y Y** es una copia de su ranking en la que se borran todas las demás alternativas. El perfil restringido a X y Y reúne todos los rankings individuales restringidos.
- Si un sistema de votación satisface IIA, produce el mismo orden de X y Y para dos perfiles cualesquiera que coincidan al restringirlos a X y Y :

Individuo	Ranking en el perfil 1	Ranking en el perfil 2	Restringido a X y Y (ambos)
1	$W \succ X \succ Y \succ Z$	$X \succ Y \succ W \succ Z$	$X \succ Y$
2	$W \succ Z \succ Y \succ X$	$Z \succ Y \succ X \succ W$	$Y \succ X$
3	$X \succ W \succ Z \succ Y$	$W \succ X \succ Y \succ Z$	$X \succ Y$

- La demostración tiene tres pasos: (1) las alternativas polarizantes quedan primeras o últimas; (2) se identifica a un potencial dictador; (3) se establece que ese individuo es un dictador.

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

Primer paso: alternativas polarizantes

- X es una **alternativa polarizante** si todos los individuos la ubican de primera o de última. Muchos perfiles no tienen ninguna.

Si F satisface Unanimidad e IIA, entonces ubica toda alternativa polarizante en el primer o en el último lugar del ranking grupal.

Perfil P	
Individuo	Ranking
1	$X \succ \dots \succ Y \succ \dots \succ Z \succ \dots$
2	$X \succ \dots \succ Z \succ \dots \succ Y \succ \dots$
3	$\dots \succ Y \succ \dots \succ Z \succ \dots \succ X$

Perfil P'	
Individuo	Ranking
1	$X \succ \dots \succ Z \succ Y \succ \dots$
2	$X \succ \dots \succ Z \succ \dots \succ Y \succ \dots$
3	$\dots \succ Z \succ Y \succ \dots \succ X$

- En P y en P' , X es polarizante. P' se obtiene de P reorganizando los rankings sin mover a X : es el paso clave de la demostración.

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

Primer paso: alternativas polarizantes

- Sea P un perfil en el que X es polarizante y suponga, por contradicción, que F no ubica a X ni de primera ni de última: hay alternativas Y y Z con $Y \succ X \succ Z$ en $F(P)$.
- En cada ranking individual que ubica Y antes que Z , se desliza Z a la posición justo delante de Y . Así se obtiene el perfil P' .
- Como X es polarizante, en ningún ranking individual cambia el orden relativo de X y Z , ni el de X y Y . Por IIA, $Y \succ X \succ Z$ también en $F(P')$.
- En P' todos los individuos ubican Z antes que Y . Por Unanimidad, $Z \succ Y$ en $F(P')$.
- Entonces $F(P')$ tendría $Y \succ X \succ Z \succ Y$, lo que contradice que F siempre produce un ranking grupal transitivo.
- Por tanto, X está en el primer o en el último lugar de $F(P)$.

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

Segundo paso: identificar a un potencial dictador

- Se escoge una alternativa X y un perfil P_0 con X al final de cada ranking individual. Un individuo a la vez, se mueve X del último al primer lugar, sin cambiar nada más: se obtienen $P_0, P_1, \dots, P_k$.
- P_{i-1} y P_i difieren solo en que el individuo i ubica a X de última en P_{i-1} y de primera en P_i .

Individuo	P_0	P_1	P_2	P_3
1	$\dots \succ X$	$X \succ \dots$	$X \succ \dots$	$X \succ \dots$
2	$\dots \succ X$	$\dots \succ X$	$X \succ \dots$	$X \succ \dots$
3	$\dots \succ X$	$\dots \succ X$	$\dots \succ X$	$X \succ \dots$

Ejemplo con $k = 3$. El orden de las demás alternativas es el mismo en todos los perfiles.

- Por Unanimidad, X es última en $F(P_0)$ y primera en $F(P_k)$. Sea P_j el primer perfil en el que X no es última en el ranking grupal: como X es polarizante en P_j , por el primer paso es primera en $F(P_j)$.
- Al cambiar su propio ranking, el individuo j mueve a X del último al primer lugar del ranking grupal.

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

Tercer paso: establecer que j es un dictador

- Sea Q un perfil cualquiera y sean Y y Z alternativas distintas de X tales que j ubica Y antes que Z . Se muestra que $F(Q)$ también ubica Y antes que Z .
- Perfil auxiliar Q' : a partir de Q , se mueve X al frente de los rankings de $1, \dots, j$ y al final de los rankings de $j+1, \dots, k$; luego se mueve Y al frente del ranking de j , justo delante de X .
 1. Q' y P_j coinciden al restringirlos a X y Z , y X es primera en $F(P_j)$. Por IIA, $X \succ Z$ en $F(Q')$.
 2. Q' y P_{j-1} coinciden al restringirlos a X y Y , y X es última en $F(P_{j-1})$. Por IIA, $Y \succ X$ en $F(Q')$.
 3. Por transitividad, $Y \succ Z$ en $F(Q')$.
 4. Q y Q' coinciden al restringirlos a Y y Z . Por IIA, $Y \succ Z$ en $F(Q)$.
- Como Q , Y y Z eran arbitrarios, el orden de Y y Z en el ranking grupal es siempre el de j : j es un dictador sobre todos los pares que no incluyen a X .

Material avanzado: una demostración del teorema de imposibilidad de Arrow

Tercer paso: establecer que j es un dictador

- Falta mostrar que j también es un dictador sobre los pares que incluyen a X .
- El argumento anterior se puede repetir con cualquier otra alternativa W distinta de X : existe un individuo ℓ que es un dictador sobre todos los pares que no incluyen a W .
- Suponga que $\ell \neq j$ y sea Y una tercera alternativa, distinta de X y de W . Los perfiles P_{j-1} y P_j difieren solo en el ranking de j , pero el orden de X y Y es distinto en $F(P_{j-1})$ y en $F(P_j)$.
- Entonces, en uno de esos dos rankings grupales el orden de X y Y difiere del que tiene ℓ en su ranking individual. Esto contradice que ℓ sea un dictador para el par X, Y ; por tanto, $\ell = j$.

El individuo j es un dictador sobre todos los pares de alternativas: el sistema de votación F coincide con la dictadura de j .

Ejercicios

Ejercicio 1

- Hay cuatro alternativas (A , B , C y D) y tres votantes. Usted diseña la agenda de un torneo de eliminación por mayoría y quiere que gane A . ¿Puede lograrlo?

(a)

$$B \succ_1 C \succ_1 D \succ_1 A$$

$$C \succ_2 D \succ_2 A \succ_2 B$$

$$D \succ_3 A \succ_3 B \succ_3 C$$

(b) Cambia el votante 3:

$$B \succ_1 C \succ_1 D \succ_1 A$$

$$C \succ_2 D \succ_2 A \succ_2 B$$

$$D \succ_3 A \succ_3 C \succ_3 B$$

Solución

(a) Sí. Primero C contra D (gana C), luego C contra B (gana B) y por último B contra A (gana A).

(b) No. Ahora C derrota por mayoría a A , a B y a D , así que C gana cualquier torneo de eliminación.

- Tres personas votan sobre cuatro alternativas (A , B , C y D) con el conteo de Borda. Usted es el votante 3 y quiere que A quede primera en el ranking grupal. ¿Puede construir un ranking individual que lo logre?

(a)

$$D \succ_1 C \succ_1 A \succ_1 B$$

$$D \succ_2 B \succ_2 A \succ_2 C$$

(b)

$$D \succ_1 A \succ_1 C \succ_1 B$$

$$B \succ_2 D \succ_2 A \succ_2 C$$

Solución

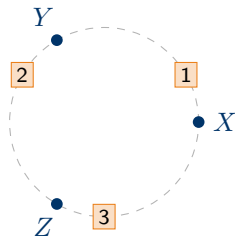
(a) No. D ya tiene 6 puntos y A tiene 2; lo máximo que usted puede darle a A son 3 puntos, para un total de 5.

(b) Sí. Los otros dos votantes dan $A = 3$, $B = 3$, $C = 1$ y $D = 5$. Si usted reporta $A \succ_3 C \succ_3 B \succ_3 D$, los totales son $A = 6$, $D = 5$, $B = 4$ y $C = 3$.

Ejercicios

Ejercicio 3

- En la sección 23.6 las alternativas están en una línea, cada votante las ordena por su distancia a un punto «ideal» y la paradoja de Condorcet no puede surgir.
- Suponga ahora que las alternativas y los puntos ideales están en un plano. Construya tres alternativas y tres votantes cuyas preferencias sean las de la paradoja de Condorcet.



Solución

X , Y y Z (puntos) en los vértices de un triángulo equilátero, a 0° , 120° y 240° de un círculo. Los puntos ideales de los votantes 1, 2 y 3 (cuadros), sobre el mismo círculo, a 30° , 150° y 270° . Así, $X \succ_1 Y \succ_1 Z$, $Y \succ_2 Z \succ_2 X$ y $Z \succ_3 X \succ_3 Y$.

- Arrow, K. J. (1950). A difficulty in the concept of social welfare. *Journal of Political Economy*, 58(4), 328-346.
- Arrow, K. J. (1963). *Social choice and individual values* (2.^a ed.). John Wiley & Sons.
- Austen-Smith, D., & Banks, J. S. (1996). Information aggregation, rationality, and the Condorcet jury theorem. *American Political Science Review*, 90(1), 34-45.
- Bar-Hillel, M., & Margalit, A. (1988). How vicious are cycles of intransitive choice? *Theory and Decision*, 24, 119-145.
- Black, D. (1948). On the rationale of group decision-making. *Journal of Political Economy*, 56, 23-34.
- Dwork, C., Kumar, R., Naor, M., & Sivakumar, D. (2001). Rank aggregation methods for the web. *Proceedings of the 10th International World Wide Web Conference*, 613-622.
- Easley, D., & Kleinberg, J. (2010). *Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected world*. Cambridge University Press.

- Feddersen, T. J., & Pesendorfer, W. (1996). The swing voter's curse. *American Economic Review*, 86(3), 408-424.
- Feddersen, T. J., & Pesendorfer, W. (1998). Convicting the innocent: The inferiority of unanimous jury verdicts under strategic voting. *American Political Science Review*, 92(1), 23-35.
- Fishburn, P. C. (1991). Nontransitive preferences in decision theory. *Journal of Risk and Uncertainty*, 4, 113-134.
- Geanakoplos, J. (2005). Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem. *Economic Theory*, 26(1), 211-215.
- Tabarrok, A., & Spector, L. (1999). Would the Borda count have avoided the Civil War? *Journal of Theoretical Politics*, 11(2), 261-288.